相対論 (Theory of Relativity)

１．Galilei(ガリレイ) 変換

静止座標系 (xyz 系) において、質量 m の粒子に力 F_x が作用しているとき、その粒子の加速度 a_x はニュートンの運動方程式

$$F_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad 0 = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad 0 = ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \tag{1}$$

によって与えられる。ただし (x, y, z) は静止系からみた粒子の空間座標、t は時間である。ニュートンの運動方程式 (1) は、ガリレイ変換と呼ばれる次のような座標系の変換則に対して不変である。

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t \tag{2}$$

ただし $x'y'z'$ 系は、xyz 系 (静止系) に対して速度 v でもって x 方向に等速度運動している。ここで (x', y', z', t') は、$x'y'z'$ 系 (運動系) から観測したときの粒子の空間座標や時間を示す。ガリレイ変換 (2) において、時間と空間座標は互いに独立のパラメーターであり、時刻の歩度が観測者の位置や速度に依存することはない。

しかしガリレイ変換 (2) では、原点から発せられた光波の波面を表す方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{3}$$

を不変に保つことができない。これは真空中の光速度は観測者の速度に依らず常に一定不変であるという Michelson-Morley(マイケルソン - モーリー) の実験に矛盾する。このことは真空中の光速に近いような高速度の場合には、ガリレイ変換 (2) は妥当ではないことを示唆している。

２．Lorentz(ローレンツ) 変換

特殊相対性理論では、一般に物理法則は次式で示されるようなローレンツ変換と呼ばれる座標系の変換則の下で不変でなければならない。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4}$$

ただし c は真空中の光速度であり、$x'y'z'$ 系は xyz 系に対して速度 v でもって x 軸方向に等速度運動しているとする。ローレンツ変換 (4) は光波の波面を表す方程式 (3) を不変にする線形変換である。すなわち真空中の光速に近い高速度の領域で成り立つような変換則になっている。更にこの変換則から、真空中の光速度を超えることは原理的に不可能であることが結論される。($v > c$ のとき変換則の分母が虚数になる。) ローレンツ変換 (4) は低速度のとき、すなわち $v \ll c$ の極限では、ニュートン力学における旧来のガリレイ変換 (2) に帰着する。ニュートン力学における運動量 $\vec{p}$ やエネルギー E を、ローレンツ変換の下で不変となるように修正すると、

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{5}$$

となる。ただし m は物体の質量、$\vec{v}$ は物体の速度である。式 (5) の相対論的エネルギー E を与える式において、物体の静止状態 $v = 0$ とすると

$$E = mc^2 \tag{6}$$

となり、質量 m とエネルギー E の等価性が示される。したがって 相対論的な運動エネルギー K は次式によって与えられる。

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2 \tag{7}$$

式 (5) の相対論的エネルギー E を与える式において、低速度 $v \ll c$ のときは、近似的に

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{8}$$

のように級数展開することができる。このとき第1項は静止状態のエネルギー (質量との等価性) であり、第2項はニュートン力学において既に知られている運動エネルギーを与える。式 (5) より、エネルギー E と運動量 $\vec{p}$ の関係を求めると

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 \tag{9}$$

を得る。運動量の直交座標成分 (p_x, p_y, p_z) を用いると、式 (9) は

$$\frac{E^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m^2c^2 \tag{10}$$

のように記せる。

３．物理法則の 4 次元定式化

原点から発せられた光波の波面を表す方程式 (3) より

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{11}$$

となる。そこで

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad \text{並びに}$$
$$x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z$$

と置くと式 (11) は次のように記せる。

$$x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = 0 \tag{12}$$

このとき

$$s^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu \tag{13}$$

とおくと、s^2 は 4 次元擬似空間内の距離の二乗を与えるものと解釈できる。
これら 4 個の座標変数を x^μ や x_μ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ で表し、4 元座標と呼ぶ。すなわち

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{並びに} \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{14}$$

である。座標 x^0 や x_0 は時間成分、座標 (x^1, x^2, x^3) や (x_1, x_2, x_3) は空間成分を表す。このような 4 元座標 x^μ や x_μ で指定される 4 次元擬似空間のことを Minkowski(ミンコフスキー) 空間という。このとき x^μ や x_μ はミンコフスキー空間内の一つのベクトルと解釈できる。ミンコフスキー空間内のベクトルは 4 元ベクトルと呼ばれ必ず 4 個の成分をもつ。ミンコフスキー空間の距離の二乗 $s^2 = 0$ のとき、これは 4 次元擬似空間内の光円錐面を与える。$s^2 > 0$ を満たす領域を時間的、 $s^2 < 0$ を満たす領域を空間的という。あらゆる物理的作用は時間的な領域内にのみ及び、空間的領域内に作用が及ぶことはあり得ない。これは真空中の光速度があらゆる作用の伝わる速さの上限であることに起因している。光円錐面 $s^2 = 0$ は、ミンコフスキー空間内において時間的領域と空間的領域の境界を与える。

相対論的エネルギーと相対論的運動量の関係式 (10) についても、4 次元形式で表示できる。すなわち

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2 \tag{15}$$

において

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad p^1 = p_x, \quad p^2 = p_y, \quad p^3 = p_z \quad \text{並びに}$$

$$p_0 = \frac{E}{c}, \quad p_1 = -p_x, \quad p_2 = -p_y, \quad p_3 = -p_z$$

と置くと、式 (15) は

$$p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3 = \sum_{\mu=0}^{3} p^\mu p_\mu = m^2c^2 \tag{16}$$

のように記せる。ここで p^μ や p_μ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ は 4 元運動量と呼ばれる。すなわち

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \qquad \text{並びに} \qquad p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) \tag{17}$$

である。式 (16) より、m^2c^2 は 4 元運動量の大きさの二乗を与える。4 元運動量 p^μ や p_μ において、p^0 や p_0 は 4 元運動量の時間成分であるが、これは通常の 3 次元空間内ではエネルギー項に該当する。4 元運動量 p^μ や p_μ の空間成分 (p^1, p^2, p^3) や (p_1, p_2, p_3) が通常の 3 次元空間内の運動量を与える。
4 元座標や 4 元運動量などは、数学的には 4 元ベクトルと呼ばれるものに属する。一般にミンコフスキー空間における 4 元ベクトルを A^μ 並びに A_μ $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とするとき

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \qquad \text{並びに} \qquad A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \tag{18}$$

である。このとき

$$A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu \tag{19}$$

は、4 元ベクトルの長さの二乗を与える。一般に A_μ は共変ベクトル、A^μ は反変ベクトルと呼ばれる。
アインシュタインの規約と呼ばれる表記法を用いると

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu \ = \ A^\mu A_\mu \tag{20}$$

のように記せる。アインシュタインの規約では、上下に付く同一記号のギリシャ文字の添え字に関しては 0 から 3 までの和をとり、記号 $\sum$ を省く。例えば二つの 4 元ベクトル A^μ, B_μ があるとき

$$A^\mu B_\mu = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3 \tag{21}$$

を意味し、これは 4 元ベクトル A^μ と B_μ の内積を表す。
　アインシュタインの規約を用いると、式 (13) の 4 次元擬似空間内の距離の二乗 s^2 は、次のように簡潔に表すことができる。

$$s^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = x^\mu x_\mu \tag{22}$$

すなわち

$$s^2 = x^\mu x_\mu \tag{23}$$

のように記せる。また 相対論的エネルギーの二乗 E^2 と相対論的運動量の二乗 p^2 の間の関係式 (16) についても同様にして簡潔に表せる。

$$m^2c^2 = p^0p_0 + p^1p_1 + p^2p_2 + p^3p_3 = p^\mu p_\mu \tag{24}$$

すなわち

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \tag{25}$$

のように記せる。
ローレンツ変換を 4 次元形式で表現すると、次式のような 4 行 4 列の行列となる。

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

ただし

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{27}$$

ここで $x'y'z'$ 系は xyz 系に対して速度 v でもって x 軸方向に等速度運動しているとする。

xyz 系における 4 元ベクトルを A^μ、その系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動している $x'y'z'$ 系で観測したときの 4 元ベクトルを $A^{\mu'}$ とすると、これらの間の関係は次のようなローレンツ変換に従う。

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \tag{28}$$

一般にローレンツ変換のもとで 4 元ベクトルの内積 $A^\mu B_\mu$ は不変である。

計量行列と呼ばれる次のような行列 $g_{\mu\nu}$ を導入すると、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

4 元ベクトルの内積 $A^\mu B_\mu$ は次式のように記せる。

$$A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{30}$$

したがって 4 元座標や 4 元運動量についても

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = s^2 \qquad \text{並びに} \tag{31}$$

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = mc^2 \tag{32}$$

のように記してよい。

4．Maxwell(マクスウェル) 方程式

マクスウェル方程式は電磁気学の基本方程式系であって、次式のように記せる。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{33}$$

ただし ∇ ならびに ∇^2 は次式によって定義される微分演算子である。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right), \qquad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \ = \ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{34}$$

また $\phi, \ \vec{A}$ は、それぞれスカラーポテンシャルならびにベクトルポテンシャルと呼ばれる量であって、時間 t ならびに空間座標 x, y, z の関数である。なお マクスウェル方程式 (33) は、電磁波すなわち光波の伝播などの電磁気現象を規定する。式 (33) を直交座標成分を用いて、あらわに記すと次式のようになる。

$$\begin{gathered} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \mu_0 j_x \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \mu_0 j_y, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \mu_0 j_z \end{gathered} \tag{35}$$

ここで ϕ と $\vec{A}$ の間には、次のような関係がある。

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{36}$$

この関係式 (36) を Lorentz(ローレンツ) 条件またはローレンツ ゲージという。式 (36) を直交座標成分を用いて、あらわに記すと次式のようになる。

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{37}$$

物理量が空間的に分布しており、空間座標 (x, y, z) や時間 t の関数で表されるとき、その量のことを場 (field) という。場の概念は粒子の概念に対峙して用いられることもある。ここでは ϕ ならびに $\vec{A}$ はそれぞれスカラーポテンシャル場ならびにベクトルポテンシャル場となっている。なお式 (33) における ρ や $\vec{j}$ は、それぞれ電荷密度

や電流密度と呼ばれ、場である ϕ や $\vec{A}$ を生起させる源泉であって、荷電粒子の運動に由来する。式 (33) において、ϵ_0 や μ_0 はそれぞれ真空誘電率ならびに真空透磁率と呼ばれる基本定数である。

電場 $\vec{E}$ や磁束密度の場 $\vec{B}$ は次式によって与えられる。

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{38}$$

式 (38) を直交座標成分を用いて、あらわに記すと次式のようになる。

$$\begin{aligned}
&E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad && E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad && E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \\
&B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, && B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, && B_z = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}
\end{aligned} \tag{39}$$

電場 $\vec{E}$ や磁束密度 $\vec{B}$ は次式で表されるような変換に対して不変である。

$$\begin{aligned}
&\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\chi \;=\; \left(A_x - \frac{\partial \chi}{\partial x},\;\; A_y - \frac{\partial \chi}{\partial y},\;\; A_z - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \\
&\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}
\end{aligned} \tag{40}$$

ただし χ は任意のスカラーであって、空間座標 x, y, z や時間 t の関数である。式 (40) で表される変換のことをゲージ (gauge) 変換という。

マクスウェル方程式 (33) を解いて、ポテンシャルの場 $\phi, \vec{A}$ が求められれば式 (38) より電場 $\vec{E}$ や磁束密度の場 $\vec{B}$ が定まる。これら電場 $\vec{E}$ や磁束密度の場 $\vec{B}$ は、単位電荷や単位電流に作用する力の場に属し、直接に観測される量である。これに対して、ϕ ならびに $\vec{A}$ のようなポテンシャルの場は空間に内在する潜在的なエネルギーに関係する場であって、理論的計算において主に用いられる。なお一般に、力の場に属する $\vec{E}, \vec{B}$ よりも、ポテンシャル場 $\phi, \vec{A}$ の方が本質的であって基本的な量である。

5．荷電粒子に作用する力

荷電粒子が、電場 $\vec{E}$ から受ける力 $\vec{F}_E$ は次式で与えられる。

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \;=\; q\,(E_x,\;\; E_y,\;\; E_z) \tag{41}$$

ただし q は荷電粒子の電荷である。式 (41) より、荷電粒子が電場から受ける力は、電場 $\vec{E}$ と同方向であって、その大きさ E に比例している。

荷電粒子が、磁束密度 $\vec{B}$ から受ける力 $\vec{F}_B$ は、荷電粒子の速度 $\vec{v}$ に依存し、次式によって与えられる。

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \;=\; q\,(v_y B_z - v_z B_y,\;\; v_z B_x - v_x B_z,\;\; v_x B_y - v_y B_x) \tag{42}$$

ただし (v_x, v_y, v_z) はそれぞれ $\vec{v}$ の x, y, z 各成分であり、(B_x, B_y, B_z) はそれぞれ $\vec{B}$ の x, y, z 各成分である。式 (42) より、荷電粒子が、磁束密度 $\vec{B}$ から受ける力 $\vec{F}_B$ は、速度 $\vec{v}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の双方に常に直角な方向となる。式 (42) における $\vec{F}_B$ は、Lorentz(ローレンツ) 力と呼ばれる。ローレンツ力の大きさ F_B は、

$$F_B = qvB\sin\theta \tag{43}$$

となる。ただし θ は速度 $\vec{v}$ と磁束密度 $\vec{B}$ のなす角である。式 (43) より、速度 $\vec{v}$ と磁束密度 $\vec{B}$ が互いに同方向の場合、力 F_B は零となる。すなわち $\vec{v}$ と $\vec{B}$ が互いに直角となるとき、F_B は最大値 qvB をとる。したがって荷電粒子が電場と磁束密度の双方から受ける力 F は

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{44}$$

によって与えられる。

6．マクスウェル方程式の 4 次元形式

電磁気学の基本方程式であるマクスウェル方程式 (33) についても 4 次元形式で表すことができる。ここで次のような 4 元ベクトルの微分演算子を導入する。

$$\partial_\mu \;=\; (\partial_0,\; \partial_1,\; \partial_2,\; \partial_3) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x^0},\;\; \frac{\partial}{\partial x^1},\;\; \frac{\partial}{\partial x^2},\;\; \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \;=\; \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\;\; \frac{\partial}{\partial x},\;\; \frac{\partial}{\partial y},\;\; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\partial^\mu \;=\; (\partial^0,\ \partial^1,\ \partial^2,\ \partial^3) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x_0},\ \ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \ \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \;=\; \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \ -\frac{\partial}{\partial x},\ \ -\frac{\partial}{\partial y},\ \ -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

このような 4 元ベクトルの微分演算子を用いると

$$\partial_\mu \partial^\mu \;=\; \partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3 \;=\; \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{45}$$

ただし 前述したように $x^0 = ct,\ \ x^1 = x,\ \ x^2 = y,\ \ x^3 = z$ 並びに $x_0 = ct,\ \ x_1 = -x,\ \ x_2 = -y,\ \ x_3 = -z$ である。

そこで式 (33) を 4 元座標を用いて記すと次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial A_x}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial A_x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial A_x}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial A_x}{\partial x_3} = \mu_0 j_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial A_y}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial A_y}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial A_y}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial A_y}{\partial x_3} = \mu_0 j_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial A_z}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial A_z}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial A_z}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial A_z}{\partial x_3} = \mu_0 j_z$$

そこで更に

$$A^0 = \frac{1}{c}\phi, \qquad A^1 = A_x, \qquad A^2 = A_y, \qquad A^3 = A_z, \qquad j^0 = c\rho, \qquad j^1 = j_x, \qquad j^2 = j_y, \qquad j^3 = j_z, \qquad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

と置くと

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) A^0 \;=\; \mu_0 j^0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) A^1 \;=\; \mu_0 j^1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) A^2 \;=\; \mu_0 j^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) A^3 \;=\; \mu_0 j^3$$

であるから、式 (45) を用いると、これら四つのマクスウェル方程式は次のように簡潔に記せる。

$$\partial_\mu\partial^\mu A^0 \;=\; \mu_0 j^0, \qquad \partial_\mu\partial^\mu A^1 \;=\; \mu_0 j^1, \qquad \partial_\mu\partial^\mu A^2 \;=\; \mu_0 j^2, \qquad \partial_\mu\partial^\mu A^3 \;=\; \mu_0 j^3 \tag{46}$$

更にこれら四つの方程式 (46) は、次のように一つの方程式にまとめられる。

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu \;=\; \mu_0 j^\nu, \qquad (\mu,\ \nu \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{47}$$

式 (47) は、4 次元形式で表したマクスウェル方程式である。

補遺

電場や磁束密度についても 4 次元形式で表すことができる。式 (39) を 4 元座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) を用いて記すと次式のようになる。

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x^1} - c\frac{\partial A_x}{\partial x^0}, \qquad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x^2} - c\frac{\partial A_y}{\partial x^0}, \qquad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial x^3} - c\frac{\partial A_z}{\partial x^0}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial A_y}{\partial x^3}, \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial x^3} - \frac{\partial A_z}{\partial x^1}, \qquad B_z = \frac{\partial A_z}{\partial x^1} - \frac{\partial A_x}{\partial x^3} \tag{48}$$

そこで更に

$$A_0 = \frac{1}{c}\phi, \qquad A_1 = -A_x, \qquad A_2 = -A_y, \qquad A_3 = -A_z$$

と置くと

$$E_x = -c\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + c\frac{\partial A_1}{\partial x^0}, \qquad E_y = -c\frac{\partial A_0}{\partial x^2} + c\frac{\partial A_2}{\partial x^0}, \qquad E_z = -c\frac{\partial A_0}{\partial x^3} + c\frac{\partial A_3}{\partial x^0}$$

$$B_x = -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \qquad B_y = -\frac{\partial A_1}{\partial x^3} + \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \qquad B_z = -\frac{\partial A_2}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \tag{49}$$

すなわち

$$\frac{E_x}{c} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \qquad \frac{E_y}{c} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}, \qquad \frac{E_z}{c} = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}$$

$$B_x = -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \qquad B_y = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}, \qquad B_z = -\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\right) \tag{50}$$

結局、電場ならびに磁束密度は、次のような一つの 2 階の反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ にまとめられる。

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \;=\; \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$